REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA

MINISTERIO DEL PODER POPULAR PARA LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD POLITECNICA TERRITORIAL DEL ESTADO BOLÍVAR

PROGRAMA NACIONAL DE FORMACIÓN EN INFORMÁTICA



|  |
| --- |
| UNIDAD I: INTEGRALES |

|  |  |
| --- | --- |
| PROFESOR:  LUZMEIDI BRAVO | ESTUDIANTES:  ALLEN PADILLA  C.I: V-31.015.345  FRANCISCO PLAZ  C.I: V-28.533.471  MARIA FALLONE  C.I: V- 31.324.446  OLIVER CASTILLO  C.I: V-28.030.110 |

CIUDAD BOLIVAR, OCTUBRE DEL 2024

INDICE

Pagina

[INDICE 2](#_Toc179740179)

[INTRODUCCION 3](#_Toc179740180)

[ANTIDERIVADAS 4](#_Toc179740181)

[Definición de anti-derivadas 4](#_Toc179740182)

[Características 4](#_Toc179740183)

[INTEGRALES INDEFINIDAS 6](#_Toc179740184)

[Tipos de integrales indefinidas 6](#_Toc179740185)

[REGLAS BASICAS DE LA INTEGRACIÓN 9](#_Toc179740186)

[Reglas Fundamentales 9](#_Toc179740187)

[Otras Reglas Útiles 9](#_Toc179740188)

[INTEGRALES INMEDIATAS 11](#_Toc179740189)

[MÉTODOS DE INTEGRACIÓN 13](#_Toc179740190)

[Integración por Sustitución 13](#_Toc179740191)

[Integración por partes 13](#_Toc179740192)

[Cálculo de áreas 13](#_Toc179740193)

[Integración numérica 14](#_Toc179740194)

[INTEGRALES DEFINIDA 16](#_Toc179740195)

[Propiedades de la integral definida 17](#_Toc179740196)

[CONCLUSIONES 20](#_Toc179740197)

[REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS 21](#_Toc179740198)

INTRODUCCION

Desde su origen, la noción de integral ha respondido a la necesidad de mejorar los métodos de medición de áreas subtendidas bajo líneas y superficies curvas. La técnica de integración se desarrolló sobre todo a partir del siglo XVII por matemáticos como Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, quienes, de manera independiente, establecieron el cálculo diferencial e integral. Fue Leibniz quien introdujo la notación integral que usamos hoy en día.  
  
A lo largo del siglo XVIII y XIX, matemáticos como Bernoulli, Euler y Cauchy profundizaron en el concepto, formalizando las integrales y desarrollando teorías más complejas. En el siglo XX, se introdujeron nuevas definiciones, como la integral de Lebesgue, que ampliaron el concepto y su aplicación en diversas áreas de la matemática. Así, las integrales han evolucionado desde simples cálculos de áreas hasta herramientas fundamentales en análisis matemático y aplicaciones en ciencias.

ANTIDERIVADAS

Definición de anti-derivadas

Una anti-derivada, o primitiva, es una función que, cuando se deriva, resulta en la función original. Es el proceso inverso de la diferenciación.

Se denomina anti-derivada de una función f (x) a la función F (x)+C, donde C se constituye como una constante. De este modo, al derivar F (x)+C, obtenemos f (x). Por eso la función F (x) es anti-derivada de la función f (x).

Características

**Constante de Integración:** Cada función tiene una familia de anti-derivadas que se diferencian por una constante, denotada como *C*.

**Linealidad:** Respetan la propiedad de linealidad, lo que significa que la anti-derivada de una suma es la suma de las anti-derivadas.

La anti derivada de la función f(x) se denota como F(x)+C, donde C es la constante de integración.

Por ejemplo, la derivada de x al cubo (x3) es 3x2. Por lo tanto, esto significa que la anti derivada de 3x2 es x3+C.

Generalmente cuando se calcula la anti derivada se añade una constante de integración, esto es debido a que cada función tiene una familia de anti derivadas. Aunque dadas unas condiciones se puede hallar el valor de la constante de integración.

INTEGRALES INDEFINIDAS

Las integrales indefinidas son, en términos simples, el opuesto o inverso de la derivación. Si la derivación nos permite hallar la pendiente de una curva en un punto específico, las integrales indefinidas no muestran la función original a través de su derivada, es decir nos muestra su curva mediante su pendiente.

En las integrales indefinidas se hacen uso de ciertos símbolos:

* **∫:** Símbolo de integración.
* **f(x):** Integrando o función a integrar.
* **dx:** Diferencial de x, indica respecto a qué variable estamos integrando.
* **F(x):** Primitiva o antiderivada de f(x).
* **C:** Constante de integración, puede tomar cualquier valor real.

**Las propiedades de las integrales indefinidas son dos:**

* **Linealidad:** La integral de una suma es la suma de las integrales, y la integral de una constante por una función es la constante por la integral de la función.
* **No conmutativa:** El orden de los factores sí altera el producto.

Tipos de integrales indefinidas

1. **Integrales Inmediatas:**

Son aquellas que se pueden resolver directamente aplicando las fórmulas básicas de integración.

* **Ejemplo:**

1. **Integrales por Sustitución:**

Se utiliza un cambio de variable para simplificar la integral y convertirla en una integral inmediata.

* **Ejemplo:** (Aquí se puede hacer el cambio u = 2x+1)

1. **Integrales por Partes:**

Se aplica cuando el integrando es un producto de funciones. Se basa en la fórmula:

* **Ejemplo:**

1. **Integrales de Funciones Racionales:**

Se utilizan para integrar funciones que son cocientes de polinomios.

* **Ejemplo:**

1. **Integrales Trigonométricas:**

Se aplican a funciones que involucran funciones trigonométricas.

* **Ejemplo:**

1. **Integrales de Funciones Irracionales:**

Se utilizan para integrar funciones que contienen raíces.

* **Ejemplo:**

Este tipo de integrales posee varios usos en los campos de trabajo/estudio, tales como:

* **Cálculo de áreas:** Encontrar el área bajo una curva.
* **Cálculo de volúmenes:** Determinar el volumen de sólidos de revolución.
* **Física:** Resolver problemas de movimiento, trabajo, etc.
* **Economía:** Modelar fenómenos económicos.
* **Ingeniería:** Analizar sistemas dinámicos.

**Ejemplo:**

Si f(x) = 2x, entonces una primitiva es F(x) = x². Pero también lo son x²+1, x²+2, x²+C, donde C es cualquier constante. Por lo tanto, la integral indefinida de 2x es: ∫2x dx = x² + C

REGLAS BASICAS DE LA INTEGRACIÓN

Las reglas básicas de integración son como las herramientas fundamentales de un carpintero, esenciales para construir soluciones a problemas más complejos. Estas reglas nos permiten encontrar la antiderivada de una función, es decir, la función original cuya derivada es la función que estamos integrando.

**Recuerda:** La integral indefinida de una función f(x) se representa como ∫f(x)dx y representa una familia de funciones cuya derivada es f(x).

Reglas Fundamentales

1. **Integral de una constante:**
   * ∫k dx = kx + C, donde k es una constante.
   * **Ejemplo:** ∫5 dx = 5x + C
2. **Integral de una potencia de x:**
   * ∫x^n dx = (x^(n+1))/(n+1) + C, donde n ≠ -1
   * **Ejemplo:** ∫x³ dx = (x⁴)/4 + C
3. **Linealidad de la integral:**
   * ∫[af(x) + bg(x)] dx = a∫f(x) dx + b∫g(x) dx, donde a y b son constantes.
   * **Ejemplo:** ∫(3x² + 2x) dx = 3∫x² dx + 2∫x dx

Otras Reglas Útiles

* **Integral de la función exponencial:**
  + ∫e^x dx = e^x + C
* **Integrales de funciones trigonométricas:**
  + ∫cosx dx = senx + C
  + ∫senx dx = -cosx + C

**Ejemplo**

Calculemos la siguiente integral: ∫(2x³ - 5x + 7) dx

Aplicando las reglas anteriores, obtenemos: 2∫x³ dx - 5∫x dx + 7∫dx = 2(x⁴/4) - 5(x²/2) + 7x + C = (x⁴/2) - (5x²/2) + 7x + C

INTEGRALES INMEDIATAS

Las integrales inmediatas o directas son integrales que no requieren la aplicación de ningún método de integración porque son muy sencillas. Por ejemplo, la integral de 2x es x2 + C, donde C es la constante de integración.

A veces el integrando es una función multiplicada por su derivada. En este caso, la integral es la función misma:

∫f(x)·f'(x)dx = f(x) + C

Siempre se debe escribir la constante de integración *C.*

Algunos ejemplos de integrales inmediatas son:

* **Ejemplo 1:**

La integral de la potencia x elevada a la quinta:

∫x5 dx

Tenemos que aplicar la propiedad "una constante puede entrar o salir de la integral”. Todo lo que se necesita es una multiplicación por 6 para obtener la derivada de x6. Multiplicamos y dividimos la integral por 6 para insertar un 6 en la integral:

∫x5 dx = ∫ x5 dx =

= ∫ 6x5 dx = · x6 + C

C ∈ ℝ

* **Ejemplo 2:**

La integral de una función racional:

∫ dx

Normalmente, las integrales inmediatas de funciones racionales son la derivada de un logaritmo. De lo contrario, tendremos que aplicar otros métodos para las integrales de funciones racionales.

El integrando será la derivada de un logaritmo si podemos escribir el numerador como derivada del denominador. Para ello, en esta integral, necesitamos cambiar 2 por 3:

∫ dx = 2 ∫ dx =

= ∫ dx =

= ∫ · 3dx =

= ln| 3x + 2 | + C

C ∈ ℝ

* **Ejemplo 3:**

Integral de un cociente con raíz cuadrada en el denominador: x2

∫ dx

Escribimos la raíz cuadrada en forma de potencia. De esta forma, aplicando las propiedades de las potencias, el integrando será muy simple (una potencia).

∫ dx = ∫ dx = ∫ dx = ∫ dx =

= ∫

= ∫ =

=

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Integración por Sustitución

Uno de los dos métodos más comunes para resolver integrales complejas es el conocido como método de sustitución o de modificación de variable. Esta técnica implica la incorporación de una nueva variable t para reemplazar una expresión adecuada del integrando, lo que facilita la integración de la expresión resultante. Por ejemplo, la integral:

∫ sen4 x cos x dx

Se simplifica significativamente si se implementa la modificación t = sen x. Así, se verificaría que dt = cos x dx, lo que significaría que la integral se reduciría a:

∫ t4 dt = + C

Finalmente, se eliminaría la variación de variable, resultando en el resultado final:

∫ sen4 x cos x dx = + C

Integración por partes

El procedimiento de integración por partes se utiliza para facilitar el cálculo de la integral de un producto de funciones que puedan ser consideradas como de la categoría u (x) × v¿ (x). La ecuación de la integración por partes se presenta a continuación:

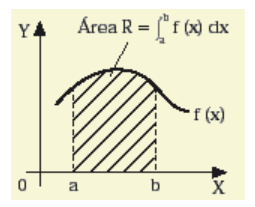
∫ u · dv = u · v - ∫ v · du

Este procedimiento se destaca especialmente cuando v × du resulta más sencillo de incorporar que u × dv.

Cálculo de áreas

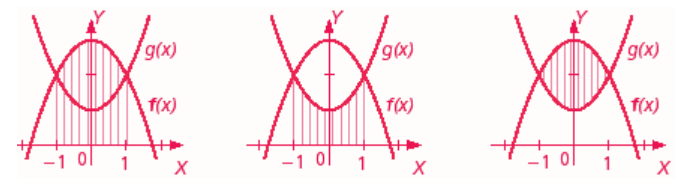
El resultado de la integral de una función continua entre los dos extremos de un intervalo [a, b] es que f (x) 3 0 " x Î [a, b] coincide con el área que se encuentra entre dicha función, el eje horizontal y las dos rectas que definen los intervalos, de las ecuaciones x = a y x = b.

Este principio también puede aplicarse para determinar las áreas que se encuentran entre curvas, mediante sencillas operaciones matemáticas de adición y sustracción.



El valor de f (x) dentro del intervalo [a, b] coincide con el valor del área R.

Por convenio, dicha área se dice que es positiva cuando f (x) ³ 0 en el intervalo, y negativa si f £ 0 en [a, b]. Cuando la función tiene signo variable, las partes de la misma situadas por encima del eje horizontal añadirán valor positivo al área global, y las que discurran por debajo sumarán valores negativos a la misma.

****

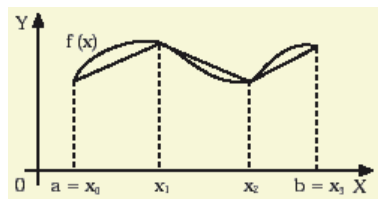
Áreas formadas por dos curvas. Desde el punto de vista geométrico, se determina el área de la intersección al restar a la integral de f (x) en el intervalo [-1, 1] el valor de la integral de g (x) para ese mismo rango.

Integración numérica

Existen momentos en los que el cálculo de una integral establecida en un intervalo se torna tan difícil que se vuelve casi irresoluble. En estas situaciones, se puede emplear un método de integración numérica aproximada, que consiste en segmentar el intervalo de definición en un grupo de subintervalos equivalentes. De esta forma, se dibujan sus imágenes en la curva y se conectan todos los puntos de imagen a través de segmentos rectilíneos.

Como f (x) es la función de origen, y [a, b] es el intervalo de integración, que puede ser dividido en n subintervalos de igual amplitud h como a = x0 < x1 < x2 < ¿ < xn = b, se puede obtener aproximadamente la región restringida por la curva de f (x) mediante la siguiente expresión:

Esta ley se llama regla de los trapecios. Evidentemente, cuanto mayor es el número de intervalos escogido, más cerca estará el valor obtenido del área real situada bajo la curva.

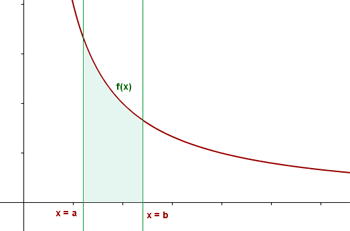


Aproximación del área de una función por integración numérica.

INTEGRALES DEFINIDA

La integral definida es un tipo de integral utilizado para determinar el valor de las áreas delimitadas por una gráfica dentro de un intervalo y del eje horizontal.

Una integral definida suele producir un valor; a diferencia de una integral indefinida, que produce una función. Las integrales definidas se representan de la misma manera que las indefinidas, pero los límites se añaden como subíndice y superíndice en el signo de integración.

Dada una función f(x) de una variable real x y un intervalo [a,b] de la recta real, la **integral definida** es igual al área limitada entre la gráfica de f(x), el eje de abscisas, y las líneas verticales x = a y x = b.

Se representa por

* ∫ es el **signo de integración**.
* **a** es el **límite inferior** de la integración.
* **b** es el **límite superior** de la integración.
* *F(x)* es el **integrando** o función a integrar.
* *dx*es el **diferencial de x** y nos indica cuál es la variable de la función que se integra.

Propiedades de la integral definida

1. El valor de la **integral definida** cambia de **signo** si se permutan los límites de integración. Cuando la función f(x) es mayor que cero, su integral es positiva; si la función es menor que cero, su integral es negativa.

Esta propiedad nos puede servir para no operar con signos negativos.

**Ejemplo:**

1. Si los límites de integración coinciden, la **integral definida** vale **cero**. Toda integral extendida a un intervalo de un solo punto, [a, a], es igual a cero.

En realidad, al tener el mismo límite de integración en ambos extremos no existe ningún área a calcular, es por eso que la integral es igual a cero en este caso.

**Ejemplo:**

1. Si *c* es un punto interior del intervalo [a, b], la i**ntegral definida** se puede **descomponer como una suma** de dos integrales extendidas a los intervalos [a, c] y [c, b].

Al estar el punto ***c*** entre ***a*** y ***b*** sobre el eje de las abscisas, el área limitada por el intervalo [a,b] es la suma de las áreas limitadas por [a,c] y [c,d], lo mismo ocurre con el valor de la integral.

**Ejemplo:**

Para 7 que pertenece al intervalo [3,10]

1. La **integral definida** de una suma de funciones es igual a la **suma de integrales. Es decir,** La integral de una suma de funciones es igual a la suma de sus integrales tomadas por separado.

Esta propiedad nos puede servir para no tener expresiones muy largas dentro de una misma integral y así manipular y hacer cálculos más fácilmente, o en el otro caso, agrupar expresiones para un cálculo más cómodo.

**Ejemplo:**

Para f(x)=x2 y g(x)=x3,

1. La integral del **producto de una constante** *k* por una función es igual a la constante *k* multiplicada por la integral de la función.

Esto es sacar la constante fuera de la integral.

**Ejemplo:**

Para la constante k=3

Teorema Fundamental del Calculo

La relación entre derivada e integral definida queda establecida definitivamente por medio del denominado **teorema fundamental del cálculo integral**, que establece que, dada una función f (x), su función integral asociada F (x) cumple necesariamente que:

A partir del teorema fundamental del cálculo integral es posible definir un método para calcular la integral definida de una función f (x) en un intervalo [a, b], denominado **regla de Barrow**:

* Se busca primero una función F (x) que verifique que F(x) = f (x).
* Se calcula el valor de esta función en los extremos del intervalo: F (a) y F (b).
* El valor de la integral definida entre estos dos puntos vendrá entonces dado por:

CONCLUSIONES

El estudio de las integrales ha sido fundamental en el desarrollo de las matemáticas y sus aplicaciones en diversas disciplinas. Desde sus orígenes en la antigüedad hasta las innovaciones del cálculo moderno, las integrales han permitido a los matemáticos y científicos resolver problemas complejos relacionados con áreas, volúmenes y fenómenos en la naturaleza.

A medida que la teoría ha evolucionado, también lo han hecho las técnicas y aplicaciones, lo que demuestra la relevancia continua de este concepto en el mundo contemporáneo. Por lo tanto, comprender las integrales no solo es esencial para el estudio de las matemáticas, sino que también es crucial para el avance de la ciencia y la tecnología.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Métodos de integración - hiru. (s. f.). <https://www.hiru.eus/es/matematicas/metodos-de-integracion>

Integrales inmediatas resueltas: Métodos de integración: cálculo de primitivas: bachillerato. (s. f.). <https://www.matesfacil.com/ejercicios-resueltos-integrales-inmediatas.htm>

Integrales inmediatas o directas – Matemáticas fáciles. (s. f.). <https://blogs.ua.es/matesfacil/bachillerato/metodos-de-integracion/integrales-inmediatas-o-directas/>

Solis. M (s. f.), *Integrales Definidas*, Recuperado el 11 de octubre de 2024 de <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/integrales-definidas.html>

*La Integral Definid*a (s. f.), Hiru.eus, Recuperado el 11 de octubre de 2024 de https://www.hiru.eus/es/matematicas/la-integral-definida